Dep. de Engenharia Mecânica

Introdução ao Método de Elementos Finitos

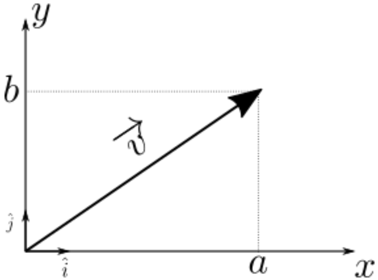
D. Coelho[1] **L. Carnevale**[1]

[1]Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ);
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPG-EM);
Grupo de Estudos e Simulações Ambientais em Reservatórios (GESAR)

FEN03-05100: Tópicos Especiais em Engenharia Mecânica I

Revisão - Algebra

Considerando o espaço $\{v = (x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, ou seja, o plano $\mathbb{R}^2$, um vetor nesse plano pode ser representado como uma combinação linear dos vetores de base $\hat{i}$ e $\hat{j}$.



$$\overrightarrow{v} = (a,\ b)$$

$$\overrightarrow{v} = a\hat{i} + b\hat{j}$$

Método de Galerkin

A partir da forma fraca:

$$\int_0^L \frac{dw}{dy}\frac{dv_x}{dy}dy = \int_0^L wgdy \tag{1}$$

Aproximar as funções w e v_x como:

$$w \approx \sum_j^n w_j N_j \tag{2}$$

$$v_x \approx \sum_i^n u_i N_i \tag{3}$$

onde N são as funções de base.

Método de Galerkin

Substituindo:

$$\int_0^L \frac{d}{dy}\left(\sum_j^n w_j N_j\right)\frac{d}{dy}\left(\sum_i^n u_i N_i\right)dy - \int_0^L \sum_j^n w_j N_j \sum_i^n g_i N_i dy = 0 \tag{4}$$

Derivada é um operador linear, então:

$$\int_0^L \sum_j^n \left(w_j \frac{dN_j}{dy}\right)\sum_i^n \left(u_i \frac{dN_i}{dy}\right)dy - \int_0^L \sum_j^n w_j N_j \sum_i^n g_i N_i dy = 0 \tag{5}$$

Método de Galerkin

A integral também é um operador linear, então:

$$\sum_{j}^{n} w_j \left[\sum_{i}^{n} \left[u_i \int_0^L \frac{dN_j}{dy} \frac{dN_i}{dy} dy - g_i \int_0^L N_j N_i dy \right] \right] = 0 \qquad (6)$$

Como a a ponderação tem que ser valida para qualquer função de peso w:

$$\sum_{i}^{n} \left[u_i \int_0^L \frac{dN_j}{dy} \frac{dN_i}{dy} dy - g_i \int_0^L N_j N_i dy \right] = 0 \qquad (7)$$

Obs.: Propriedade distributiva dos somatórios $\sum_j a_j \cdot \sum_i b_i = \sum_j \sum_i a_j b_i$

Forma Matricial

Definindo as matrizes:

$$\mathrm{K_{ij}} = \int_0^L \frac{dN_j}{dy}\frac{dN_i}{dy}dy \tag{8}$$

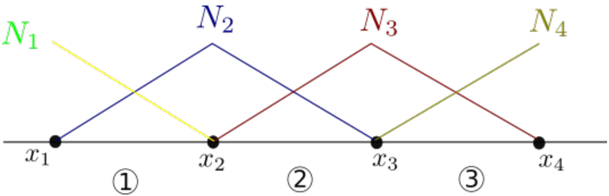
$$\mathrm{M_{ij}} = \int_0^L N_j N_i dy \tag{9}$$

Pode se escrever o sistema:

$$\mathrm{K_{ij}} u_i = \mathrm{M_{ij}} g_i \tag{10}$$

onde K e M são conhecidas como matriz de rigidez e massa respectivamente.

Linear 1D



Para o Elemento 1, as funções de forma são:

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{\Delta x} \tag{11}$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{\Delta x} \tag{12}$$

onde $\Delta x = x_2 - x_1$ é o tamanho do elemento

Linear 1D

As matrizes **K** e **M** no elemento 1 são:

$$\mathrm{k}^1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\mathrm{m}^1 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Suas componentes são calculadas resolvendo as integrais:

$$k_{11} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx \tag{15}$$

$$k_{22} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx \tag{16}$$

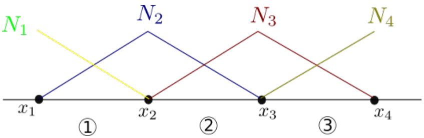
$$k_{12} = k_{21} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx \tag{17}$$

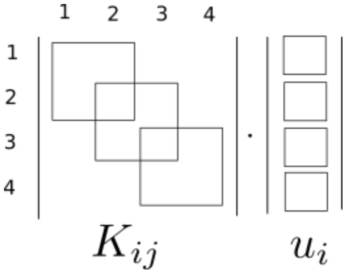
$$m_{11} = \int_{x_1}^{x_2} N_1 N_1 dx \tag{18}$$

$$m_{22} = \int_{x_1}^{x_2} N_2 N_2 dx \tag{19}$$

$$m_{12} = m_{21} = \int_{x_1}^{x_2} N_1 N_2 dx \tag{20}$$

Linear 1D - Assembling





$$\mathsf{k}^1 = \frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\mathsf{m}^1 = \frac{\Delta x}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Linear 1D - Assembling

$$
\mathsf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & & \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & & \\ & k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{33}^3 & \\ & & k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathsf{M} = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & & \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 + m_{22}^2 & & \\ & m_{32}^2 & m_{33}^2 + m_{33}^3 & \\ & & m_{43}^3 & m_{44}^3 \end{bmatrix} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

Sistema e Condição de Contorno

$$\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{\Delta x}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{\Delta x}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 K_{11} \\ u_1 K_{21} \\ u_1 K_{31} \\ u_1 K_{41} \end{bmatrix}$$

Referências

LEWIS, Roland W.; NITHIARASU, Perumal; SEETHARAMU, Kankanhalli N. Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow. John Wiley & Sons, 2004.

HUGHES, Thomas JR. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Courier Corporation, 2012.